# MATHEMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

## Option "Mathématiques"

### I

Soit E un espace vectoriel complexe hermitien de dimension finie. On note $< x, y >$ le produit hermitien des éléments $x, y$ de E.

On rappelle que si $u$ est un endomorphisme de E, l'adjoint $u^*$ de $u$ est le seul endomorphisme de E tel que, quels que soient les éléments $x$, $y$ de E, on ait $< ux, y > = < x, u^* y >$.

Soit $u$ un endomorphisme unitaire de E, c'est-à-dire tel que $< ux, uy > = < x, y >$ pour tous $x, y$ de E.

1° Montrer que $u$ est inversible et que $u^{-1} = u^*$.

2° Soit $v$ un endomorphisme de E qui commute avec son adjoint $v^*$ : $vv^* = v^*v$. Montrer que les endomorphismes $v$ et $v^*$ ont même noyau.

3° Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ d'espace propre $V_\lambda$. Montrer que $\lambda$ est valeur propre de $u^*$ de même espace propre. En déduire $|\lambda| = 1$.

### II

Désormais E est le $\mathbb{C}$- espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni de la structure hermitienne canonique :

$$< (a_i), (b_i) > = \sum_i a_i \, \overline{b_i}$$



L'ensemble $M_n \mathbb{C}$ des matrices $n \times n$ à coefficients complexes peut être considéré comme l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\mathbb{C}^n$ : à tout endomorphisme on associe la matrice le représentant dans la base canonique et inversement.

On note $SU_n$ l'ensemble des éléments de $M_n \mathbb{C}$ unitaires et de déterminant 1. Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $D(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{ii} = \lambda_i$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

1° Montrer que $SU_n$ est un groupe pour la composition.

2° Soit $u \in SU_n$. Si E' est la somme des sous-espaces propres de $u$ et E'' l'orthogonal de E', montrer que E'' est stable par $u$.

En déduire que $E'' = 0$ et que $u$ est diagonalisable.

3° Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, ..., \alpha_n$, de somme nulle, et $s \in SU_n$ tels que :

$$u = sD(e^{i\alpha_1}, ..., e^{i\alpha_n}) s^{-1}.$$

Si $(\beta_1, ..., \beta_n)$ est une permutation de $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, montrer qu'il existe $s \in SU_n$ tel que :

$$D(e^{i\beta_1}, ..., e^{i\beta_n}) = sD(e^{i\alpha_1}, ..., e^{i\alpha_n}) s^{-1}.$$

4° Soit $Z = \{u \in SU_n : \forall v \in SU_n, uv = vu\}$. Montrer que $u \in Z$ équivaut à l'existence d'une racine $n^{ième}$ de l'unité $\lambda$ telle que $u = D(\lambda, ..., \lambda)$.

*Les sections* III, IV *et* V *sont indépendantes sauf en ce qui concerne les notations; des renvois permettent d'en localiser les définitions. Par ailleurs certains résultats de* III *et* IV *peuvent être utilisés dans* V, *mais il est possible de les utiliser sans en connaître la démonstration.*

### III

Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1° On considère un sous-groupe G de $SU_n$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $i$, $1 \leqslant i < n$, pour tout $a \in \mathbb{C}^n$ tel que $|a| = 1$ et tel que $< a, e_j > = 0$ si $j < i$, il existe $u \in G$ tel que $u(e_i) = a$ et $u(e_j) = e_j$ si $j < i$.

Montrer que $G = SU_n$.

. . . / . . .

*Indication* : si $u \in SU_n$, montrer l'existence de $g \in G$ tel que $gu$ ait la première colonne nulle sauf le premier terme qui est égal à 1. Alors $gu$ a la première ligne nulle sauf le premier terme qui est égal à 1. Continuer dans le même esprit.

2° Soit $T_{n-1}$ le sous-groupe des matrices diagonales de $SU_n$, et soit $SO_n$ le sous-groupe de $SU_n$ constitué de toutes les matrices de $SU_n$ à coefficients réels. Soit enfin G un sous-groupe de $SU_n$ contenant $T_{n-1}$ et $SO_n$. Montrer que $G = SU_n$.

3° Ici, $n = 2$. On note

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

et $r_0 = R(\pi/4)$. Soit G un sous-groupe de $SU_2$ contenant $T_1$ (voir 2) et $r_0$. Montrer que $G = SU_2$.

*Indication* : si $d_0 = D(e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4})$, calculer $d_0 r_0 D(e^{it}, e^{-it}) r_0^{-1} d_0^{-1}$.

## IV

Dans toute cette section H est un sous-groupe distingué de $SU_n$ où $n$ est un entier quelconque sauf en IV.2° où $n = 2$. On suppose que $H \subset Z$ et que $H \neq Z$ (*) (voir en II.4° la définition de Z). On se propose de montrer que $H = SU_n$.

1° Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, de somme nulle, tels que $D(e^{i\alpha_1}, \ldots, e^{i\alpha_n}) \in H$ et de façon que, pour au moins un couple $j, k$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, on ait $\alpha_j \neq \alpha_k \bmod 2\pi$.

2° On suppose ici que $n = 2$. Envisager pour un $t \in \mathbb{R}$ et un $\alpha \in ]0,\pi[$ le produit $R(t) D(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}) R(-t) D(e^{-i\alpha}, e^{i\alpha})$ et en déduire que $T_1 \subset H$ (voir en III.3° la définition de $R(t)$ et en III.2° celle de $T_1$).

3° On revient au cas de $n$ quelconque. Montrer que pour tout réel $\alpha$, $D(e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}, 1, \ldots, 1) \in H$, puis que $H \supset T_{n-1}$ (voir III.2°), et enfin que $H = SU_n$.

(*) il fallait lire $H \supset Z$



## V

Sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$, le complémentaire de l'origine dans $\mathbb{C}^2$, on considère la relation d'équivalence $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ tel que $(a', b') = \lambda (a, b)$.

Soit $S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$. La sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ peut être identifiée à $S^2$: .

On définit $\varphi : \mathbb{C}^2 - \{0\} \to S^2$ par

$$\varphi(a, b) = \left( \frac{2 a\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2}, \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2} \right).$$

1° Vérifier que $\varphi$ est bien définie, surjective, et que $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$ si et seulement si $(a, b) \sim (a', b')$.

2° On note $P_1 \mathbb{C}$ l'espace quotient de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ par la relation $\sim$. L'application $\varphi$ définit donc une bijection $\tilde{\varphi} : P_1 \mathbb{C} \to S^2$. Soit $u \in SU_2$.

Montrer que $u$ définit une bijection de $P_1 \mathbb{C}$ sur lui-même, et donc aussi une bijection $\tilde{\varphi} u \tilde{\varphi}^{-1}$ qu'on notera $\underline{u}$ de $S^2$ sur lui-même.

3° Soit $G = \{u \in SU_2 : \underline{u} \text{ est une isométrie de } S^2\}$. Montrer que $G = SU_2$. On pourra utiliser III.3°.

4° Expliquer pourquoi, quand $u \in SU_2$, on peut considérer que $\underline{u} \in SO_3$ (voir notation III.2°). On définit ainsi $\mu : SU_2 \to SO_3$ qui à $u \in SU_2$ fait correspondre $\mu(u) = \underline{u} \in SO_3$. Montrer que $\mu$ est un homomorphisme de noyau Z (voir II.4°).

5° Montrer que les groupes $SO_3$ et $SU_2/Z$ sont isomorphes.

FIN